Έστω A μη κενό και κφ σύνολο με $A \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης ένα κ.φ m του A είναι το $\inf A \Leftrightarrow \exists x_\nu \in A$ με $\lim x_\nu = m$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$\{\Rightarrow\}$: Έστω $m = \inf A$ και θΔΟ $\exists x_\nu \in A$ με $\lim x_\nu = m$

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \le x, \ \forall x \in A \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) : x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\varepsilon = \frac{1}{\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}$

Επομένως, για $\nu = 1$, $\exists x_1 \in A : x_1 < m + 1$

για $\nu = 2$, $\exists x_2 \in A : x_2 < m + \frac{1}{2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

για $\nu = \nu$, $\exists x_\nu \in A : x_\nu < m + \frac{1}{\nu}$

Άρα, $m \le x_\nu < m + \frac{1}{\nu}$ Άρα, από θ. ισοσυγκλιν. ακολουθ. $\lim x_\nu = m$

$\{\Leftarrow\}$: Έστω ότι $\exists x_\nu \in A$ με $\lim x_\nu = m$ και θΔΟ $m = \inf A$

Έστω ότι $m \neq \inf A$ άρα $\exists m' > m$ όπου $m' = \inf A$ κφ.

Επίσης $\lim x_\nu = m \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - m| < \varepsilon$

Θέτω $\varepsilon = m' - m > 0$

άρα, $|x_\nu - m| < m' - m \Rightarrow -m' + m < x_\nu - m < m' - m \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m - m' < x_\nu < m' \Rightarrow x_\nu < m' \Rightarrow m'$ αφ του A

. Άτοπο αφού m' κφ.

Παρομοίως και για το Supremum του A